



Л. Н. Пестов, В. М. Филатова

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ
ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ
ДЛЯ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ АКУСТИКИ**

154

Предложен алгоритм численного решения обратной динамической задачи о восстановлении двух параметров акустической среды (плотности и модуля сжимаемости) по граничным измерениям (оператору реакции). Решение основано на линеаризованном варианте метода граничного управления: оператор реакции явно определяет энергетические билинейные формы относительно граничных управлений. Мы используем линеаризованные представления этих форм относительно фоновых параметров. Приводятся результаты численного моделирования.

In this paper we develop a numerical algorithm for solving inverse dynamical problem: recovering two parameters of the acoustical medium (density and compressibility modulus) by boundary measurements (response operator). The solution is based on a linearized version of the Boundary Control method: the response operator explicitly determined some bilinear energy forms w.r.t. boundary controls. We use linearized presentations of these forms w.r.t. to background. The results of numerical experiments are represented.

Ключевые слова: многомерные обратные динамические задачи, метод граничного управления, численное решение обратных динамических задач.

Key words: multidimensional inverse dynamical problem, boundary control method, numerical solving inverse dynamical problems.

Прямая задача.

Пусть D — односвязная ограниченная область в R^2 с гладкой границей Γ . Рассмотрим начально-краевую (прямую) задачу для волнового уравнения

$$\rho u_{tt} - \operatorname{div}(k \nabla u) = 0, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, \quad (2)$$

$$u_{\nu}|_{\Gamma \times [0, T]} = f \in L^2(\Gamma \times [0, T]), \quad (3)$$

где $\rho(x)$ — плотность; $k(x)$ — модуль сжатия, $c(x) = \sqrt{k(x)/\rho(x)}$ — скорость звука; u_{ν} — производная по нормали. Решение прямой задачи будем обозначать u^f и называть волной, возбужденной управлением f . Системе (1)-(3) сопоставим оператор реакции $R^T : L^2(\Gamma \times [0, T]) \rightarrow L^2(\Gamma \times [0, T])$, определяемый равенством: $R^T f = u^f|_{\Gamma \times [0, T]}$.

Обратная задача.

Рассматривается обратная задача восстановления параметров ρ, k во всей области D по данным обратной задачи — оператору R^{2T} , заданному при фиксированном T , удовлетворяющем условию



$T > T^* = \sup_{x \in D} \text{dist}(x, \Gamma)$, где расстояние рассматривается в смысле римановой метрики $|dx|/c(x)$. Величина T^* имеет смысл акустического радиуса области D . Решение обратной задачи основано на идеях метода граничного управления [1; 2], точнее, используются линеаризованные представления билинейных энергетических форм. В отличие от работ [3; 4] мы не решаем задачу граничного управления. Условие $T > T^*$ гарантирует, что все неоднородности среды фиксируются граничными измерениями, в противном случае в среде существует непустая область, неосвещенная к моменту времени T , и, стало быть, невидимая с границы.

Билинейные формы.

Определим билинейные формы $[f, g]$ и $[f, g]_p$:

$$[f, g] = \int_D \rho(x) u^f(x, T) u^g(x, T) dx, \quad (4)$$

$$[f, g]_p = \int_D k(x) (\nabla u^f(x, T), \nabla u^g(x, T)) dx. \quad (5)$$

Оказывается, формы (4), (5) явно определяются оператором реакции $R^{2T} f$ [3; 4]. Введем обозначения

$$a_{\pm}(\cdot, t) = (a(\cdot, t) \pm a(\cdot, 2T - t)) / 2,$$

$$(Ia)(\cdot, t) = \int_0^t a(\cdot, s) ds, \quad t \in [0, 2T].$$

Теорема. Для любых управлений f, g имеют место равенства

$$[f, g] = \int_{\Gamma \times [0, T]} [(R^{2T} g)_+ I f - g_+ (I R^{2T} f)] d\Sigma. \quad (6)$$

$$[f, g]_p = \int_{\Gamma \times [0, T]} \left\{ f \frac{\partial}{\partial t} [(R^{2T} g)_+] + g_+ \frac{\partial}{\partial t} [I R^{2T} f] \right\} d\Sigma, \quad (7)$$

где $d\Sigma = dt d\Gamma$, $d\Gamma$ – элемент объема границы Γ .

Численное решение прямой задачи. МКЭ – аппроксимация.

В области D построим триангуляционную сетку Делоне с N узлами, N_t треугольниками и N_b граничными узлами. Решение прямой задачи разложим по кусочно-линейным базисным функциям МКЭ (с условием $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, N$):

$$u_N(x, t) \approx \sum_{n=1}^N U_n(t) \phi_n(x).$$

Метод Галеркина сводит исходную прямую задачу к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$MU'' + KU = G, \quad (8)$$

$$G_i(t) = \int_{\Gamma} f(x, t) \phi_i dx, \quad i = 1, \dots, N$$

и с нулевыми данными Коши



$$U(0) = U'(0) = 0. \quad (9)$$

Постоянные матрицы M, K (матрица масс и матрица жесткости) вычисляются по формулам

$$M_{ij} = \int_D \rho \phi_i \phi_j dx, \quad K_{ij} = \int_D k (\nabla \phi_i, \nabla \phi_j) dx.$$

Мы используем кусочно-постоянную модель параметров ρ, k , тогда для матрицы масс и матрицы жесткости имеем

$$M_{ij} = \sum_{l=1}^{N_t} \rho_l M^{(l)}, \quad M^{(l)} = \int_{\Delta_l} \phi_i \phi_j dx, \quad (10)$$

$$K_{ij} = \sum_{l=1}^{N_t} k_l K^{(l)}, \quad K^{(l)} = \int_{\Delta_l} (\nabla \phi_i, \nabla \phi_j) dx, \quad (11)$$

156

где Δ_l — l -й треугольник, $1 \leq l \leq N_t$. Решение задачи (8)–(9), отвечающее управлению f , будем обозначать $U^f(t)$, а вектор-функцию в правой части — $G^f(t)$.

Дискретная обратная задача.

Определим линейно-независимую систему управлений

$$f_{ij} = r_j(t) \delta_{s_i}(x), \quad j = 1, \dots, N_r, \quad i = 1, \dots, N_s, \quad x \in \Gamma, \quad (12)$$

где $\delta_{s_i}(x)$ — сеточная дельта-функция на Γ : $\delta_{s_i}(x_l) = \begin{cases} 1, & s_i = l, \\ 0, & s_i \neq l, \end{cases}$

s_i ($i = 1, \dots, N_s$) — номер граничного узла, в котором расположен граничный источник; $r_j(t) = r(t - j\Delta t)$ — функция Рикера, смещенная на шаг $j\Delta t$, $j = 1, \dots, N_d$ (рис. 1); N_d — количество задержек по времени; N_s — количество граничных источников.

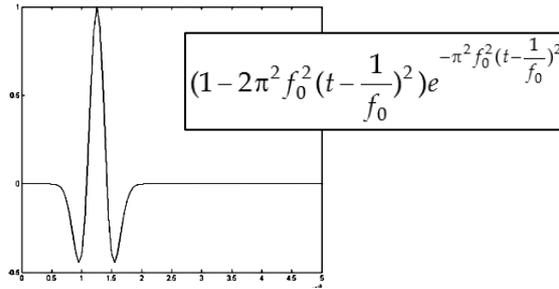


Рис. 1. Функция Рикера f_0 — доминирующая частота

В дальнейшем *базисные управления* (12) будем нумеровать единым индексом $\alpha = 1, \dots, N_d \times N_s$. Таким образом, управление определяется положением граничного источника и задержкой по времени в импульсе Рикера.

Введем некоторые обозначения:



- матрица управлений $F_{i\alpha} = G_i^{f\alpha}$, $i = 1, \dots, N_b$, $\alpha = 1, \dots, N_d \times N_s$.
- матрица реакции R – решение прямой задачи в граничных узлах в момент времени t для системы управлений (12), $R_{i\alpha}(t) = U_{s_i}^{f\alpha}(t)$, $t \in [0, 2T]$, $x_{s_i} \in \Gamma$, $i = 1, \dots, N_b$, $\alpha = 1, \dots, N_d \times N_s$.
- матрица финальных состояний W – решение прямой задачи во всех узлах сетки в финальный момент времени T для набора управлений (12), $W_{i\alpha} = U_i^{f\alpha}(T)$, $\alpha = 1, \dots, N_d \times N_s$, $i = 1, \dots, N$.

Данные обратной задачи – матрица реакции $R(t)$, $t \in [0, 2T]$. Аналогами билинейных форм (4) и (5) для системы управлений (12) являются матрицы $C = W^* M W$, $P = W^* K W$, которые явно определяются данными обратной задачи [3]:

$$C = \int_0^T [R_+^* I F - (I R)^* F_+](t) dt, \quad P = \int_0^T [(R_+)_t^* F + R_t^* F_+](t) dt.$$

Алгоритм реконструкции.

Пусть кусочно-постоянные коэффициенты ρ , k лежат в некоторой ε -окрестности «фоновых» коэффициентов ρ_0 , k_0 . Разложим W в ряд Тейлора в окрестности ρ_0 , k_0 :

$$W = W^0 + (\rho_l - \rho_l^0) \frac{\partial W^0}{\partial \rho_l} + (k_l - k_l^0) \frac{\partial W^0}{\partial k_l} + \dots,$$

где W_0 – решение прямой задачи для коэффициентов ρ_0 , k_0 и набора управлений (12). Здесь и ниже подразумевается суммирование по повторяющимся индексам. Тогда для C и P имеем

$$\begin{aligned} C &= (W^0)^* \rho_l M^{(l)} W^0 + \\ &+ [(\rho_n - \rho_n^0) \frac{\partial W^0}{\partial \rho_n} + (k_n - k_n^0) \frac{\partial W^0}{\partial k_n}]^* \rho_l M^{(l)} [(\rho_m - \rho_m^0) \frac{\partial W^0}{\partial \rho_m} + (k_m - k_m^0) \frac{\partial W^0}{\partial k_m}] + \dots \\ P &= (W^0)^* k_l K^{(l)} W^0 + \\ &+ [(\rho_n - \rho_n^0) \frac{\partial W^0}{\partial \rho_n} + (k_n - k_n^0) \frac{\partial W^0}{\partial k_n}]^* k_l K^{(l)} [(\rho_m - \rho_m^0) \frac{\partial W^0}{\partial \rho_m} + (k_m - k_m^0) \frac{\partial W^0}{\partial k_m}] + \dots \end{aligned}$$

Используя линейное приближение, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно ρ_l и k_l :

$$\rho_l W_0^* M^{(l)} W_0 = C, \tag{13}$$

$$k_l W_0^* K^{(l)} W_0 = P. \tag{14}$$

При решении обратной задачи (системы (13), (14)) применяется грубая сетка, которая получается путем объединения треугольников исходной сетки в более крупные ячейки. Такая регуляризация требуется в связи с большим количеством неизвестных и возможной плохой обусловленностью системы (13), (14) при недостаточном количестве управлений.



Численные эксперименты.

В среде MatLab был разработан комплекс функций, позволяющий проводить численные эксперименты.

Область D – круг радиусом $r = 0,1515$ м. В численных экспериментах $T^* \approx 0,16$, далее полагаем $T = 0,3$. Использовалась триангуляционная сетка с количеством узлов $N = 1337136$ и количеством треугольников $N_t = 2326999$. Количество управлений «по пространству» $N_s = 32$ и «по времени» $N_d = 50$. Доминирующая частота функции Рикера $f_0 = 1330$ КГц. На рисунке 2 представлены модели коэффициентов ρ, k .

158

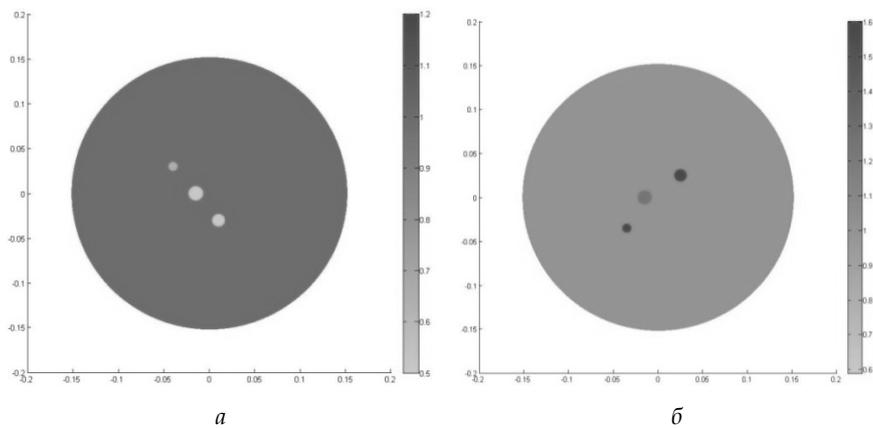


Рис. 2. Модель ρ (а) и k (б)

Результат восстановления приводится на рисунке 3. Заметим, что в линейном приближении невозможно разделить ρ и k .

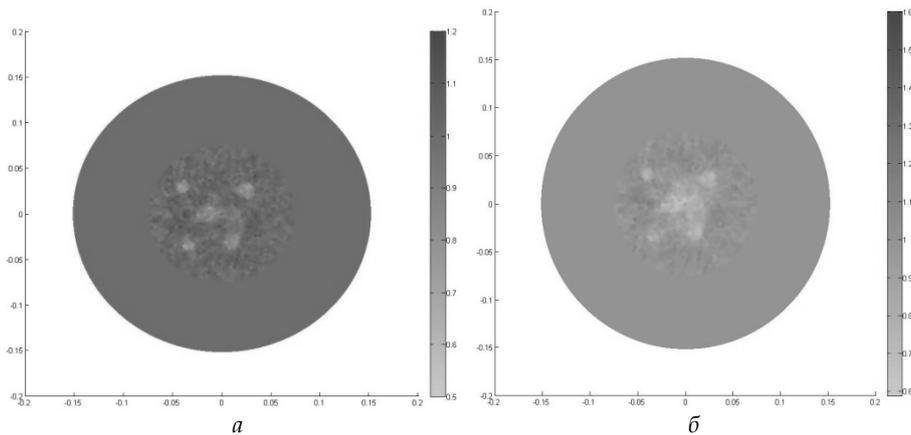


Рис. 3. Результат восстановления ρ (а) и k (б)

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-01-00260а).



Список литературы

1. *Belishev M.I.* Boundary control in reconstruction of manifolds and metrics (the BC-method) // *Inverse Problems*. 1997. № 13. P. 1–45.
2. *Belishev M.I.* Boundary Control Method in Dynamical Inverse Problems – An Introductory Course by M.I. Belishev. Gladwell G.M.L., Morassi A., Editors // *Dynamical Inverse Problems: Theory and Application*. CISM Courses and Lectures. Wien, Springer, 2011. Vol. 529. P. 85–150.
3. *Pestov L., Bolgova V., Kazarina O.* Numerical recovering a density by BC-method // *Inverse Problems and Imaging (American Institute of Mathematical Sciences)*. 2010. Vol. 4, № 4. P. 703–712. URL: <http://arxiv.org/pdf/0906.0836.pdf>
4. *Филатова В.М.* Численное восстановление коэффициента поглощения методом граничного управления // *Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта*. 2012. Вып. 10. С. 153–159.

Об авторах

Леонид Николаевич Пестов — гл. науч. сотр., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.
E-mail: LPestov@kantiana.ru

Виктория Михайловна Филатова — науч. сотр., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.
E-mail: ViFilatova@kantiana.ru

About authors

Leonid Pestov — chief research fellow, I. Kant Baltic Federal University.
E-mail: LPestov@kantiana.ru

Viktoria Filatova — research fellow, Immanuel Kant Baltic Federal University.
E-mail: ViFilatova@kantiana.ru